全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品学练考

AI智慧教辅

主编 肖德好

导学案

高中数学

基础版

必修第二册 RJA

本书为AI智慧教辅

“讲课智能体”支持学生聊着学，扫码后哪里不会选哪里；随时随地想聊就聊，想问就问。

長江出版傳媒
崇文書局

CONTENTS 目录 导学案

06 第六章　平面向量及其应用

PART SIX

07 第七章　复数

PART SEVEN

第六章　平面向量及其应用

6.1　平面向量的概念

6.1.1　向量的实际背景与概念

6.1.2　向量的几何表示

6.1.3　相等向量与共线向量

【学习目标】

1. 通过对力、速度、位移等的分析，了解平面向量的实际背景，理解平面向量、零向量、向量的模、单位向量、平行向量(共线向量)的意义和两个向量相等的含义.

2. 能够在熟悉的实际问题情境中，理解平面向量的几何表示和基本要素.

课堂明新知　　知识导学　典例探究

◆ 要点一　向量的概念及其表示

新知构建

1. 向量的概念

(1)向量：既有________又有________的量叫作向量.

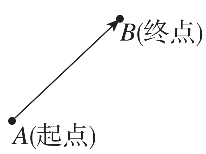
(2)数量：只有________没有________的量称为数量.

2. 向量的表示

(1)向量的表示

①有向线段

具有________的线段叫作有向线段，它包含三个要素：________、________、________. 如图，以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$，线段 AB 的长度叫作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，记作 $|\overrightarrow{AB}|$.



②向量的表示方法

向量的几何表示：向量可以用有向线段来表示，有向线段的________表示向量的大小，有向线段的________表示向量的方向. 如 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$.

向量的字母表示：向量可以用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…表示，书写时，用带箭头的小写字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，…表示.

(2)零向量、单位向量

①向量的模：向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的________(或称模)，记作________.

②零向量：长度为________的向量叫作零向量，记作________.

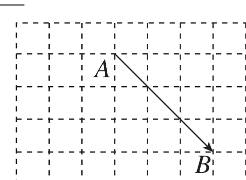
③单位向量：长度等于________的向量叫作单位向量.

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)有向线段可以表示向量.　(　　)

(2)在同一平面内，把所有长度为 1 的向量的起点固定在同一点，这些向量的终点形成的轨迹是半径为 1 的圆.　(　　)

2. 在如图的方格纸上，每个小正方形的边长为 1，则 $|\overrightarrow{AB}|=$________.



3. 0 与 $\mathbf{0}$ 有什么区别和联系？

典例解析

例 1 给出下列物理量:①质量;②速度;③位移;④力;⑤加速度;⑥路程;⑦密度.其中是向量的有________.(填序号)

变式 关于平面向量,下列说法正确的是 ( )

A. 向量可以比较大小

B. 向量的模可以比较大小

C. 速度是向量,位移是数量

D. 零向量是没有方向的

[素养小结]

解决与向量概念有关问题的方法

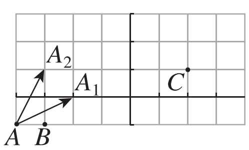
解决与向量概念有关问题的关键是突出向量的核心——方向和长度,如:单位向量的核心是方向没有限制,但长度都是一个单位长度;零向量的核心是方向没有限制,长度是 0;规定零向量与任意向量共线.只有紧紧抓住概念的核心才能顺利解决与向量概念有关的问题.

◆ 要点二 向量的简单应用

例 2 如图是中国象棋的半个棋盘示意图,“马走日”是象棋中“马”的走法,“马”可从 A 跳到 A_1,也可从 A 跳到 A_2,用向量 $\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{AA_2}$ 表示“马”走了“一步”,试在图中画出:

(1)“马”从 A 处走到 B 处的一种情况;

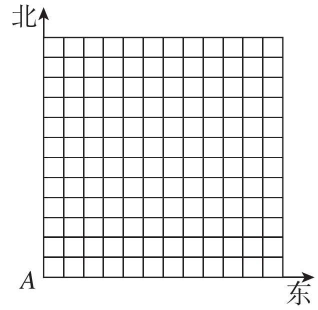
(2)“马”在 C 处走了“一步”的所有情况.



变式 某人从 A 点出发向东走了 3 m 到达 B 点,然后改变方向沿东北方向走了 $5\sqrt{2}$ m 到达 C 点,到达 C 点后又改变方向向西走了 5 m 到达 D 点.(规定小方格的边长为 1 m)

(1)在图中作出向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$;

(2)求 $\overrightarrow{AD}$ 的模.



[素养小结]

作图时,向量可用有向线段来表示,其长度表示向量的大小,其箭头所指的方向表示向量的方向.应该注意的是有向线段是向量的表示,并不能说向量就是有向线段.

◆ 要点三 相等向量与共线向量

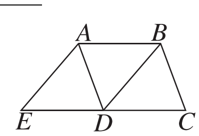
新知构建

1. 平行向量:方向____________的________叫作平行向量.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作________.规定:零向量与任意向量平行.

2. 相等向量:长度________且方向________的向量叫作相等向量.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

3. 共线向量:任一组________都可以平移到同一条直线上,因此,平行向量也叫作________.

【诊断分析】 如图所示,已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $ABDE$ 都是平行四边形.



(1)图中与向量 $\overrightarrow{AB}$ 共线的向量有______________;

(2)图中与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有____________.

典例解析

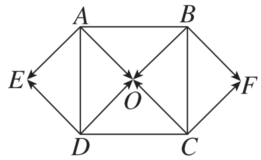
例 3 如图所示,点 O 为正方形 $ABCD$ 对角线的交点,四边形 $OAED$,$OCFB$ 都是正方形.在图中所示的向量中:

(1)分别写出与 $\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{BO}$ 相等的向量.

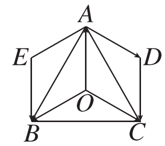
(2)写出与 $\overrightarrow{AO}$ 共线的向量.

(3)写出与 $\overrightarrow{AO}$ 的模相等的向量.

(4)向量 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 是否相等?



变式 如图所示,O 是正三角形 ABC 的中心,四边形 $AOCD$ 和四边形 $AOBE$ 均为平行四边形.



(1)与向量 $\overrightarrow{AD}$ 相等的向量有________;

(2)与向量 $\overrightarrow{OA}$ 相反的向量有________;

(3)与向量 $\overrightarrow{OA}$ 的模相等的向量有____________.

(填图中所画出的向量)

[素养小结]

判断一组向量是否相等,关键是看这组向量是否方向相同,长度相等,与起点和终点的位置无关.判断一组向量是否共线,只需判断它们是否同向或反向.

6.2 平面向量的运算

6.2.1 向量的加法运算

【学习目标】

1. 借助实例和平面向量的几何表示,掌握平面向量加法运算及运算规则,并理解其几何意义,会用向量加法的三角形法则和平行四边形法则作出两个向量的和.

2. 能够在数学问题情境中,掌握向量加法的交换律与结合律,并会用它们进行向量运算.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 向量加法的定义及运算法则

新知构建

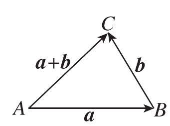
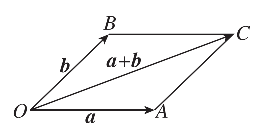
1. 向量加法的定义

求____________的运算,叫作向量的加法.

2. 向量加法的运算法则

	三角形法则	平行四边形法则
前提	已知非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$	已知不共线的两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$
作法	在平面内任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{AC}=$________	作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,以 OA,OB 为邻边作 ▱$OACB$,连接 OC,则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

(续表)

	三角形法则	平行四边形法则
结论	向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和
图形		
特例	对于零向量与任意向量 $\boldsymbol{a}$,我们规定________=________=________	
三角不等式	$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$,当且仅当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量或 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是方向相同的非零向量时,等号成立	

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.(正确的打“√”,错误的打“×”)

(1)两个向量相加的结果可能是一个数量. ( )

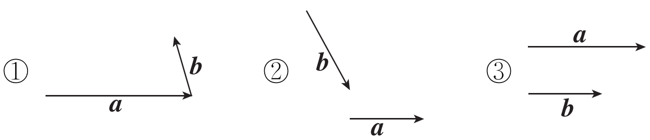
(2)两个向量相加实际上就是两个向量的模相加. ( )

(3)任意两个向量的和向量不可能与这两个向量共线. ( )

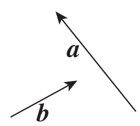
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 表示“向东航行 1 km”,向量 $\boldsymbol{b}$ 表示“向南航行 1 km”,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示什么?

典例解析

例 1 (1)如图,已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,用向量加法的三角形法则作出①②③中的向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.(不写作法,画出图形即可)



(2)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$(如图),请用向量加法的平行四边形法则作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.(不写作法,画出图形即可)



变式 如图所示,O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心,化简下列各式:

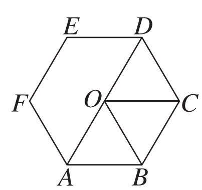
(1)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=$________;

(2)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=$________;

(3)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OD}=$________;

(4)$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{FE}=$________;

(5)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=$________.



[素养小结]

(1)在使用向量加法的三角形法则时,要注意“首尾相接”,即若第一个向量的终点与第二个向量的起点重合,则以第一个向量的起点为起点,并以第二个向量的终点为终点的向量为两向量的和.

(2)向量加法的平行四边形法则的应用前提是“共起点”,即两个向量是从同一点出发的不共线向量.

拓展 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$?

◆ 要点二 向量加法的运算律

新知构建

运算律	交换律	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________
	结合律	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=$________

【诊断分析】判断下列说法的正误.(正确的打“√”,错误的打“×”)

(1)$\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$. ( )

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})$. ( )

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$. ( )

典例解析

例 2 化简:(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$;

(2)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$;

(3)$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$;

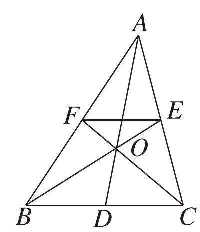
(4)$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{DC}$.

变式 如图,在$\triangle ABC$ 中,D,E,F 分别是 BC,AC,AB 的中点,O 为 AD,BE,CF 的交点,化简下列各式:

(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}$;

(2)$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}$;

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DC}$.



[素养小结]

解决向量的加法运算问题时应注意两点：

(1)可以利用向量的几何表示，画出图形进行化简或计算.

(2)要灵活应用向量加法的运算律，注意各向量的起、终点及向量起、终点字母的排列顺序，特别注意勿将 $\mathbf{0}$ 写成 0.

拓展 已知点 O 为△ABC 外接圆的圆心，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}=\mathbf{0}$，则△$ABC$ 的内角 A 等于________.

◆ 要点三　向量加法的实际应用

例 3 一条河的宽度为 800 m，一艘船从 A 处出发垂直到达河正对岸的 B 处，船航行的速度大小为 20 km/h，水流的速度大小为 12 km/h，则船到达 B 处需要多长时间？

变式 轮船从 A 港出发，沿北偏东 $60°$ 方向行驶了 40 km 到达 B 处，再从 B 处出发，沿正北方向行驶了 40 km 到达 C 处，求此时轮船与 A 港的相对位置.

[素养小结]

应用向量解决实际问题的基本步骤

表示：用向量表示有关量，将所要解答的问题转化为向量问题

运算：应用向量加法的平行四边形法则和三角形法则，将相关向量进行运算，解答向量问题

还原：根据向量的运算结果，结合向量共线、相等等概念回答原问题

6.2.2　向量的减法运算

【学习目标】

1. 借助实例和平面向量的几何表示，掌握平面向量减法运算及运算规则，并理解其几何意义.
2. 会作出两个向量的差.

课堂明新知　知识导学　典例探究

◆ 要点一　向量的减法及其几何意义

新知构建

1. 相反向量

定义	与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度________，方向________的向量，叫作 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记作 $-\boldsymbol{a}$
性质	$-(-\boldsymbol{a})=$________
	零向量的相反向量仍是零向量
	$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=$________
	如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互为相反向量，那么 $\boldsymbol{a}=$________，$\boldsymbol{b}=$________，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________

【诊断分析】判断下列说法的正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)相反向量就是方向相反的向量.　(　　)

(2)向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为相反向量.　(　　)

(3)$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$，$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.　(　　)

2. 向量减法及其几何意义

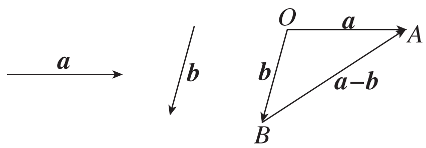
(1)向量减法的定义

向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的________，叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$________. 求两个向量差的运算叫作向量的________.

(2)向量减法的几何意义

如图所示，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$________$=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从________指向________的向量.



(3)$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$与$|\boldsymbol{a}|$,$|\boldsymbol{b}|$之间的关系

(1)对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,都有________$\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant$________;

(2)当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线且同向时,有$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________或________;

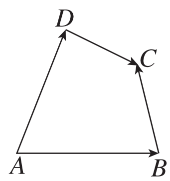
(3)当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线且反向时,有$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

【诊断分析】 1. 判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)两个向量的差仍是一个向量. ( )

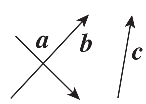
(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的差与向量 $\boldsymbol{b}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的差互为相反向量. ( )

2. 如图所示,在四边形 $ABCD$ 中,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,则向量 $\overrightarrow{DC}$ 可用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 表示为________.

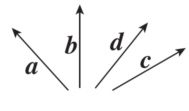


典例解析

例 1 [一题多解] 如图,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 不共线,求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



变式 如图所示,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{d}$,求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$.



[素养小结]

求作两个向量的差向量的两种思路

(1)可以转化为向量的加法来进行,如 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,可以先作 $\boldsymbol{a}$,$-\boldsymbol{b}$,然后作 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$即可.

(2)也可以直接用向量减法的几何意义,即使两向量的起点重合,则差向量为连接两个向量的终点,指向被减向量的终点的向量.

◆ 要点二 向量加减法的混合运算

例 2 (1)下列不能化简为 $\overrightarrow{PQ}$ 的是 ( )

A. $\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{CQ}$

B. $\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BQ})$

C. $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{QC})$

D. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BQ}$

(2)化简:

①$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$;

②$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OB})$.

变式 化简:(1)$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}-\overrightarrow{PQ}=$________;

(2)$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$________;

(3)$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=$________.

[素养小结]

(1)向量减法运算的常用方法

常用方法:
- 可以通过相反向量,把向量的减法运算转化为加法运算
- 运用三角形法则,此时要注意两个向量要有共同的起点
- 引入点O,运用三角形法则,将各向量的起点统一

(2)向量加减法化简的两种形式

①首尾相连且为和;

②起点相同且为差.

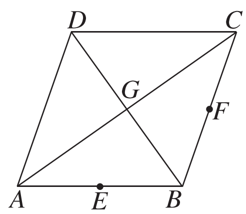
做题时要注意观察是否有这两种形式,同时要注意逆向应用.

◆ 要点三　向量减法及其几何意义的应用

例 3 如图所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,E,F 分别为边 AB 和 BC 的中点,G 为 AC 与 BD 的交点.

(1)若 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|$,则四边形 $ABCD$ 是什么特殊的平行四边形?说明理由.

(2)化简 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{EB}$,并在图中作出表示该化简结果的向量.



变式 (1)已知平面内的四边形 $ABCD$ 和点 O,设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$,若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$,试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

(2)已知非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$,且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=3$,求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值.

[素养小结]

向量减法的几何意义:两向量相减,表示两向量起点的字母必须相同,这样两向量的差向量以减向量的终点字母为起点字母,以被减向量的终点字母为终点字母.此类问题要根据图形的几何性质,运用向量的平行四边形法则和三角形法则解题,若题目中遇到共起点的向量,则常常创造条件作差,要特别注意向量的方向.

6.2.3　向量的数乘运算

【学习目标】

1. 通过实例分析,掌握平面向量数乘运算及运算规则,理解其几何意义.
2. 理解两个平面向量共线的含义.
3. 了解平面向量的线性运算性质及其几何意义.

课堂明新知　　知识导学　典例探究

◆ 要点一　向量数乘的概念

新知构建

1. 向量的数乘的定义

一般地,我们规定实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个________,这种运算叫作____________,记作________,它的长度与方向规定如下:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=$____________;

(2)当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________;

当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________;

当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=$________,方向________.

【诊断分析】判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向一致.　(　　)

(2)若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.　(　　)

(3)对于任意实数 m 和向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,若 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.　(　　)

典例解析

例 1 (1)(多选题)已知 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量,下列说法中正确的是　　(　　)

A. $2\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,且 $2\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 2 倍

B. $-2\boldsymbol{a}$ 与 $5\boldsymbol{a}$ 的方向相反,且 $-2\boldsymbol{a}$ 的模是 $5\boldsymbol{a}$ 的模的 $\frac{2}{5}$

C. $-2\boldsymbol{a}$ 与 $2\boldsymbol{a}$ 是一对相反向量

D. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 是一对相反向量

(2)[2025·江苏徐州沛县高一调研] 设 λ 为实数,已知 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量,向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 2,$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}$,则 $\lambda=$________.

变式 已知点 C 在线段 AB 的延长线上,且 $AB:AC=2:3$.

①用 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$;②用 $\overrightarrow{CB}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$.

◆ 要点二　向量的线性运算

新知构建

1. 向量数乘的运算律

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为向量,λ,μ 为实数,那么

(1)$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=$________;

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=$________;

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$________.

特别地,$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a})$,$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

2. 向量的线性运算

(1)向量的____________运算统称为向量的线性运算.

(2)对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,以及任意实数 λ,μ_1,μ_2,恒有 $\lambda(\mu_1\boldsymbol{a}\pm\mu_2\boldsymbol{b})=$____________.

典例解析

例 2 (1)已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

(2)计算:

①$8(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-6(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-2(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$;

②$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b})-(4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\right]$.

变式 (1)化简:

①$4(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+6(-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=$________;

②$\frac{2}{5}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})+\frac{2}{15}(2\boldsymbol{a}+13\boldsymbol{b})=$________;

③$\frac{2}{3}\left[(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}(6\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b})\right]=$________.

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ 满足关系式 $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$,$-4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$,则向量 $\boldsymbol{x}=$____________,$\boldsymbol{y}=$____________.(用向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示)

[素养小结]

向量线性运算的方法

(1)向量的线性运算类似于多项式的代数运算,实数运算中的去括号、移项、合并同类项、提取公因式等变形手段在向量的线性运算中同样适用.

(2)向量也可以通过列方程来解,即把所求向量当作未知数,利用解代数方程的方法求解,同时在运算过程中要多注意观察,恰当运用运算律,简化运算.

◆ 要点三　向量共线定理

新知构建

向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是:________一个实数 λ,使________.

【诊断分析】 1. 判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)若向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,则存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.　　(　　)

(2)若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.　　(　　)

2. 向量共线定理中为什么规定 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$?

典例解析

例3 已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面上两个不共线的向量，且 $\overrightarrow{AB}=k\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

(1)若 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 的方向相反，求 k 的值；

(2)若 A,C,D 三点共线，求 k 的值.

变式 (1)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，则一定共线的三点是 ( )

A. A,B,D　　B. A,B,C

C. B,C,D　　D. A,C,D

(2)已知 A,B,P 三点共线，O 为直线 AB 外任意一点，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $x+y=$ ( )

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$

C. 2　　D. $\frac{1}{3}$

[素养小结]

1. 证明或判断三点共线的方法

(1)一般来说，要判断 A,B,C 三点是否共线，只需看是否存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$(或 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 等).

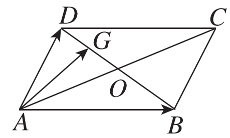
(2)利用结论：若 A,B,C 三点共线，O 为直线外一点，则存在实数 x,y，使 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$ 且 $x+y=1$.(此结论为二级结论，可在小题中使用)

2. 利用向量共线求参数的方法

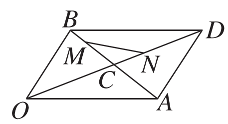
解决判断、证明向量共线问题的思路是根据向量共线定理寻求唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$. 而已知向量共线求 λ，常根据向量共线的条件转化为相应向量系数相等求解. 若两向量不共线，则必有向量的系数为零，利用待定系数法建立方程(组)，从而解方程(组)求得 λ 的值.

◆ 要点四　用已知的向量表示未知的向量

例4 如图，在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，点 O 是 AC 与 BD 的交点，点 G 是 DO 的中点，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AG}$.



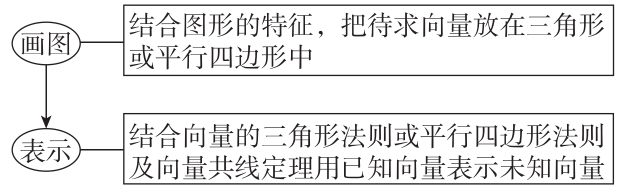
变式 如图所示，四边形 $OADB$ 是平行四边形，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$，$C$ 是两条对角线的交点，$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$，试用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 表示向量 $\overrightarrow{MN}$.



[素养小结]

用已知向量表示其他向量的两种方法

1. 直接法



2. 方程法

当直接表示比较困难时，可以先利用三角形法则或平行四边形法则建立关于所求向量和已知向量的等量关系式，然后解关于所求向量的方程.

6.2.4 向量的数量积

第 1 课时 向量数量积的定义、投影向量

【学习目标】

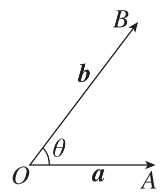
1. 通过物理中“功”等实例，理解平面向量数量积的概念及其物理意义，会计算平面向量的数量积.
2. 通过几何直观，了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义，体会平面向量数量积与投影向量的关系.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 向量的夹角

新知构建



1. 定义：如图，已知两个____________ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，O 是平面上的任意一点，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB=\theta$__________叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的________.

2. 特殊情况：(1)当 $\theta=$________时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 $\theta=$________时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向.

(2)向量垂直：如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是________，我们说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作________.

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则向量 $2\boldsymbol{a}$ 与 $-3\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$. ( )

(2)在等边三角形 ABC 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$. ( )

2. 向量的夹角的几何意义是什么？向量的夹角的取值范围是什么？

典例解析

例 1 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角是多少？$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角又是多少？

◆ 要点二 向量的数量积

新知构建

条件	已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 θ
结论	数量________叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积)
记法	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________
规定	零向量与任一向量的数量积为________

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)两个向量的数量积仍然是向量. ( )

(2)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角. ( )

(3)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. ( )

2. 向量的数量积与向量的数乘的区别是什么？

典例解析

例 2 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=5$，分别求下列条件下 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

(1)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

(3)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$.

变式 (1)在等腰直角三角形 ABC 中,$AB=BC=4$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$______,$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=$______,$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=$______.

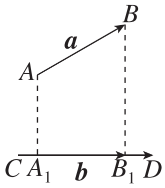
(2)已知 $|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}$,则 $|\boldsymbol{b}|=$______.

[素养小结]

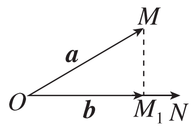
求平面向量数量积的步骤:(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ,$\theta\in[0,\pi]$;(2)分别求 $|\boldsymbol{a}|$ 和 $|\boldsymbol{b}|$;(3)求数量积,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$,要特别注意书写时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间用实心圆点"·"连接,不能用"×"连接,也不能省去.

◆ 要点三　向量 a 在 b 上的投影向量

新知构建



1. 投影与变换:如图,设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$,过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B,分别作 $\overrightarrow{CD}$ 所在直线的垂线,垂足分别为 A_1,B_1,得到 $\overrightarrow{A_1B_1}$,称上述变换为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$______,$\overrightarrow{A_1B_1}$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的______.



2. 投影向量的定义:如图,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$,过点 M 作直线 ON 的垂线,垂足为 M_1,则 $\overrightarrow{OM_1}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的______.

3. 计算:设与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为______.

【诊断分析】 判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)若 $|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{e}|=1$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为 $30°$,则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量为 $2\sqrt{3}\boldsymbol{e}$.　(　)

(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量与 $\boldsymbol{b}$ 共线,且模为 $|\boldsymbol{a}\cos\theta|$($\theta$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角).　(　)

典例解析

例 3 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=1$,向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$,求:

(1)向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量;

(2)向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量.

变式 (1)已知等边三角形 ABC 的边长为 2,则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{CA}$ 上的投影向量为　(　)

A. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$　　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

C. $2\overrightarrow{AC}$　　D. $2\overrightarrow{CA}$

(2)已知 $|\boldsymbol{b}|=3$,若 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$　(　)

A. 3　　B. $\frac{9}{2}$

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

(3)若 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=4$,向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$,与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为______.

[素养小结]

求投影向量的方法

(1)向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的计算公式为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$,其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,向量 $\boldsymbol{e}$ 为与向量 $\boldsymbol{b}$ 同方向的单位向量,即 $\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$;向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

◆ 要点四　平面向量数量积的基本性质

新知构建

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是非零向量,它们的夹角是 θ,$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量,则

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=$______.

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$______.

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$______;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$______.

特别地,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=$______或 $|\boldsymbol{a}|=$______.

(4)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,当且仅当______时等号成立.

(5)$\cos\theta=$______.

【诊断分析】 判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)对任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 均有 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.　(　)

(2)若 $|\boldsymbol{a}|=2$,则 $\boldsymbol{a}^2=4$.　(　)

(3)设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则"$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$"的充要条件是"$\cos\theta>0$".　(　)

典例解析

例 4 给出以下结论：① $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$；②若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；③ $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$；④已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量，若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$；⑤ $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；⑥若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角. 其中正确结论的个数为 ( )

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

变式 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量，则下列说法中正确的个数为 ( )

①若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

②若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向共线，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$；

③若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

④若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$.

A. 1　B. 2

C. 3　D. 4

[素养小结]

对于这类概念、性质、运算律的问题的解答，关键是要深刻理解相关知识，特别是那些易与实数运算相混淆的运算律，如消去律、乘法结合律等，当然还有向量的数量积中有关角的概念以及数量积的性质等.

第 2 课时　向量数量积的运算律

【学习目标】

理解平面向量数量积的运算律，会用数量积判定两个平面向量的垂直关系.

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　向量数量积的运算律

新知构建

对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，有

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________（交换律）.

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=$________$=$________（结合律）.

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$__________（分配律）.

【诊断分析】判断下列说法的正误.（正确的打“√”，错误的打“×”）

(1) $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$. ( )

(2) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$. ( )

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. ( )

典例解析

例 1（多选题）设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是不共线的非零向量，则下列结论正确的是 ( )

A. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

B. $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直

C. $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

D. $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$

变式（多选题）将平面向量的数量积运算与实数的乘法运算相类比，下列结论正确的是 ( )

A. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

B. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

C. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

D. 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\ (\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0})$，可得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

◆ 要点二　数量积运算律的应用

新知构建

多项式乘法	向量数量积
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=$________
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=$________
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$________
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=$__________

典例解析

例 2 (1)已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，则 $(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=$________.

(2)在 $\triangle ABC$ 中，M 是 BC 的中点，$AM=3$，$BC=10$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

变式 (1)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$ ( )

A. $\frac{17}{2}$　B. $\frac{15}{2}$　C. $-\frac{17}{2}$　D. $-\frac{15}{2}$

(2)已知长方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，E 是 AD 的中点，F 是 AB 的中点，则 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EF}=$ ( )

A. 7　B. 8

C. 9　D. 10

[素养小结]

(1)求两个向量的数量积,应首先确定两个向量的模及夹角,其中准确求出两个向量的夹角是求数量积的关键.

(2)根据数量积的运算律,向量的加、减与数量积的混合运算类似于多项式的乘法运算.

◆ 要点三　向量模、夹角的计算问题

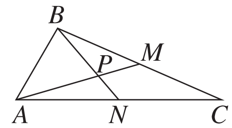
例3 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=1$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$.

(1)求 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(2)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角.

变式 (1)非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$,若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

(2)如图,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=2,AC=5,\angle BAC=60°$, BC,AC 边上的中线 AM,BN 相交于点 P,则 $|\overrightarrow{AP}|=$________.



[素养小结]

求平面向量的模和夹角时要注意数量积运算律的正确运用,在解决与图形有关的模与夹角问题时要注意选择合适的向量表示及公式的正确计算.

◆ 要点四　两个非零向量的垂直问题

例4 已知非零向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 满足 $4|\boldsymbol{m}|=3|\boldsymbol{n}|$, $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$,若 $\boldsymbol{n}\perp(t\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$,则实数 t 的值为　(　　)

A. 4　　B. -4

C. $\frac{9}{4}$　　D. $-\frac{9}{4}$

变式 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3},|\boldsymbol{b}|=2$,且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

[素养小结]

解决与垂直有关的问题时要利用 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量).

6.3　平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1　平面向量基本定理

【学习目标】

了解平面向量基本定理及其意义,会用平面向量基本定理解决简单数学问题.

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　平面向量基本定理

新知构建

1. 平面向量基本定理:如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个________向量,那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$,有且只有一对实数 λ_1,λ_2,使 $\boldsymbol{a}=$________________.

2. 基底:若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$________,我们把 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 叫作表示这一平面内所有向量的一个基底.

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)平面内任意两个向量都可以构成表示该平面内所有向量的一个基底.　(　　)

(2)平面向量基本定理中基底的选取是唯一的.　(　　)

(3)若 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$,则 $\lambda_1=\lambda_2=0$.　(　　)

2. 已知平面内的一个基底$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$,平面内任何一个向量$\boldsymbol{a}$都可以表示成$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$的形式,这种表示形式是唯一的吗?

典例解析

例 1 (1)(多选题)下列说法中正确的是 ( )

A. 一个平面内只有一对不共线向量可构成表示该平面内所有向量的基底

B. 一个平面内有无数对不共线向量可构成表示该平面内所有向量的基底

C. 零向量不可作为基底中的向量

D. 一对不共线的单位向量可构成表示该平面内所有向量的一个基底

(2)设$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$是表示某一平面内所有向量的一个基底,则下列四组向量中不能构成表示这一平面内所有向量的一个基底的是 ( )

A. $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ B. $3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2,4\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_1$

C. $\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_1$ D. $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1$

变式 (1)设O是平行四边形$ABCD$两条对角线的交点,给出下列向量组:

①$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$;②$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}$;③$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DC}$;④$\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}$.

其中可作为表示这个平行四边形所在平面内所有向量的一个基底的是 ( )

A. ①② B. ①③

C. ①④ D. ③④

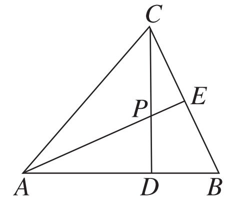
(2)设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不共线,$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,试判断$\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$能否构成一个基底.

[素养小结]

判断两个向量是否能构成一个基底,主要看两向量是否非零且不共线.此外,一个平面的基底一旦确定,那么该平面内任意一个向量都可以由这个基底唯一线性表示出来.

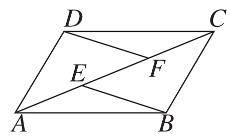
◆ 要点二 用基底表示向量

例 2 如图,在$\triangle ABC$中,E是边BC的中点,点D在边AB上,且满足$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$,$AE$与$CD$交于点$P$.试用$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$表示$\overrightarrow{CD}$和$\overrightarrow{CP}$.



变式 (1)已知$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$是表示某一平面内所有向量的一个基底,且$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,若$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,则$\lambda+\mu=$________.

(2)如图,在平行四边形$ABCD$中,E,F是对角线AC上的两个三等分点,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{DF}=$________,$\overrightarrow{BE}=$________.(用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$表示)



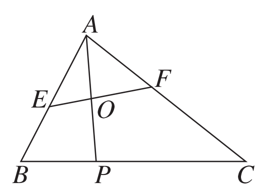
[素养小结]

用两个不共线的向量构成的基底表示其他向量的基本方法有两种:一种是运用向量的线性运算法则对待求向量不断进行转化,直至能用基底表示;另一种是通过列向量方程或方程组的形式,利用基底表示向量的唯一性求解.

拓展 如图,在$\triangle ABC$中,点P满足$\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{BP}$,$O$是线段$AP$的中点,过点$O$的直线与边$AB,AC$分别交于点$E,F$.

(1)若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,求$x$和$y$的值;

(2)若$\overrightarrow{EB}=\lambda\overrightarrow{AE}(\lambda>0)$,$\overrightarrow{FC}=\mu\overrightarrow{AF}(\mu>0)$,求$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{2}{\mu}$的最小值.



◆ 要点三　平面向量基本定理的应用

新知构建

1. 平面向量基本定理唯一性的应用

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是同一平面内的两个不共线向量，若 $x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}$，则 $\begin{cases}x_1=x_2,\\y_1=y_2.\end{cases}$

2. 重要结论

设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是平面内的一个基底，若 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$：

①当 $\lambda_2=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 共线；

②当 $\lambda_1=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线；

③当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

典例解析

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，点 D,E,F 分别在边 AB,BC,AC 上，且 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{DB}$，$3\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FC}$，$P$ 是 CD 与 EF 的交点. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$.

(1)用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$；

(2)求 $\dfrac{|\overrightarrow{CP}|}{|\overrightarrow{PD}|}$ 的值.

变式 用向量法证明三角形的三条边上的中线交于一点.

[素养小结]

平面向量基本定理唯一性的应用

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是同一平面内的两个不共线向量，若 $x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}$，则 $\begin{cases}x_1=x_2,\\y_1=y_2.\end{cases}$

6.3.2　平面向量的正交分解及坐标表示

6.3.3　平面向量加、减运算的坐标表示

【学习目标】

1. 借助平面直角坐标系，理解平面向量坐标的概念，掌握平面向量的正交分解及坐标表示.
2. 掌握平面向量的坐标运算，会用坐标表示平面向量的加、减运算.

课堂明新知　　知识导学　典例探究

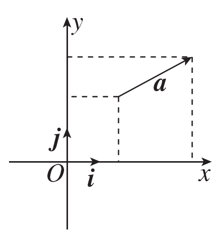
◆ 要点一　平面向量的正交分解及坐标表示

新知构建

1. 正交分解：把一个向量分解为两个________的向量，叫作把向量作正交分解.

2. 平面向量的坐标表示

如图，在平面直角坐标系中，设与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量分别为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$，取 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ 作为基底. 对于平面内的任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，由平面向量基本定理可知，有且只有一对实数 x,y，使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$. 这样，平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可由 x,y 唯一确定，我们把有序数对________叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=$________. 其中，x 叫作 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标，y 叫作 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上的坐标，$\boldsymbol{a}=(x,y)$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示.



3. 特殊向量的坐标：$\boldsymbol{i}=$______，$\boldsymbol{j}=$______，$\boldsymbol{0}=$______.

4. 向量的坐标与点的坐标的关系

设 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，其中 O 为坐标原点，则向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标________就是终点 A 的坐标；反过来，终点 A 的坐标________也就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标. 因此，在平面直角坐标系中，每一个平面向量都可以用一个有序实数对唯一表示.

【诊断分析】 判断下列说法的正误.（正确的打"√"，错误的打"×"）

(1)相等向量的坐标相同，且与向量的起点、终点无关. (　　)

(2)当向量的起点在坐标原点时，向量的坐标就是向量终点的坐标. (　　)

(3)与 x 轴平行的向量的纵坐标为 0，与 y 轴平行的向量的横坐标为 0. (　　)

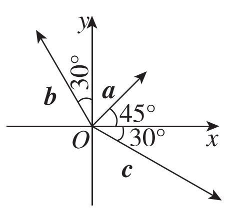
典例解析

例 1 (1)已知向量 $\boldsymbol{a}$ 在射线 $y=x(x\geqslant 0)$ 上，且起点为坐标原点 O，若 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别为与 x 轴、y 轴方向相同的单位向量，取 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ 作为基底，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 (　　)

A. $(1,1)$　　B. $(-1,-1)$

C. $(\sqrt{2},\sqrt{2})$　　D. $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

(2)在平面直角坐标系 xOy 中，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的方向如图所示，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{c}|=4$，分别计算向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标.



变式 已知 O 是坐标原点，点 A 在第一象限，直线 OA 与 x 轴的夹角为 $60°$，$|\overrightarrow{OA}|=4\sqrt{3}$.

(1)求向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标；

(2)若 $B(\sqrt{3},-1)$，求 $\overrightarrow{BA}$ 的坐标.

[素养小结]

(1)求一个点的坐标，可以转化为求该点相对于坐标原点的位置的坐标.

(2)求一个向量的坐标实际上是把该向量的起点平移到坐标原点，其终点的坐标即是该向量的坐标.

◆ 要点二　平面向量加、减运算的坐标表示

新知构建

设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则有下表：

	文字描述	符号表示
加法	两个向量和的坐标分别等于这两个向量相应坐标的________	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$____________
减法	两个向量差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的________	$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$____________
重要结论	一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的______的坐标减去______的坐标	已知 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)$

【诊断分析】判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)若向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$,$\overrightarrow{BC}=(3,4)$,则 $\overrightarrow{AC}=(4,6)$. ( )

(2)两向量差的坐标与两向量的顺序无关. ( )

(3)已知点 $A(2,5)$,$B(5,8)$,则 $\overrightarrow{AB}=(3,3)$. ( )

典例解析

例2 (1)在平行四边形 $ABCD$ 中,$A(1,2)$,$B(3,5)$,$\overrightarrow{AD}=(-1,2)$,则 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=$ ( )

A. $(-2,4)$ B. $(4,6)$

C. $(-6,-2)$ D. $(-1,9)$

(2)设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3)$,$\boldsymbol{b}=(-2,4)$,$\boldsymbol{c}=(0,5)$,则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=$________.

变式 (1)设 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 是平面直角坐标系内分别与 x 轴、y 轴正方向同向的单位向量,O 为坐标原点,若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$,则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 的坐标是 ( )

A. $(8,11)$ B. $(9,14)$

C. $(3,6)$ D. $(-5,-2)$

(2)已知三点 $A(2,-1)$,$B(3,4)$,$C(-2,0)$,则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=$________,$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=$________.

(3)设向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的坐标分别是 $(-1,2)$,$(3,-5)$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为________________.

[素养小结]

平面向量坐标运算的方法

(1)若已知向量的坐标,则直接应用两个向量和、差的运算法则.

(2)若已知有向线段两端点的坐标,则可先求出向量的坐标,再进行向量的坐标运算.

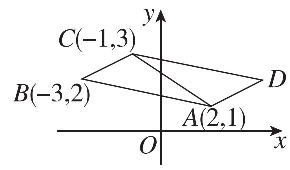
(3)向量的线性坐标运算可类比数的运算进行.

◆ 要点三 平面向量坐标运算的综合应用

例3 如图,平面上 A,B,C 三点的坐标分别为 $(2,1)$,$(-3,2)$,$(-1,3)$.

(1)写出向量 $\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BC}$ 的坐标;

(2)如果四边形 $ABCD$ 是平行四边形,求点 D 的坐标.



变式 (1)已知 $M(-2,7)$,$N(6,1)$,点 P 是线段 MN 上的点,且 $\overrightarrow{PN}=-\overrightarrow{PM}$,则点 P 的坐标为________.

(2)已知点 $A(2,3)$,$B(5,4)$,$\overrightarrow{AC}=(5\lambda,7\lambda)(\lambda\in\mathbf{R})$,$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,若点 P 在第一、三象限的平分线上,则 $\lambda=$________.

[素养小结]

平行四边形顶点坐标的求解思路

(1)已知平行四边形的三个顶点的坐标求第四个顶点的坐标主要是利用平行四边形的对边平行且相等这个性质,则其对应的向量相等,即向量的坐标相等.

(2)当平行四边形的顶点位置未确定时,要分类讨论.

6.3.4 平面向量数乘运算的坐标表示

【学习目标】

1. 掌握平面向量的坐标运算,会用坐标表示平面向量的数乘运算.
2. 能用坐标表示平面向量共线的条件.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 平面向量数乘运算的坐标表示

新知构建

设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则 $\lambda\boldsymbol{a}=$________$(\lambda\in\mathbf{R})$,即实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标.

【诊断分析】判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,3)$,$\boldsymbol{c}=(3,4)$,若 $\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$,则 λ_1,λ_2 的值分别为 $-1,2$. ( )

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的坐标分别是 $(-1,2)$,$(3,-5)$,则 $3\boldsymbol{a}=(-3,6)$,$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(7,-11)$. ( )

典例解析

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，求：

(1)$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$；(2)$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$；(3)$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

变式 (1)若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,-1)$，则$\boldsymbol{c}=$ ( )

A. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$

C. $-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

(2)已知三点 $A(2,-1)$，$B(3,4)$，$C(-2,0)$，则 $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}=$________，$\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}=$________.

[素养小结]

向量的坐标运算主要是利用加、减运算法则及数乘运算法则进行，解题时要注意方程思想的运用及正确使用运算法则.

◆ 要点二　平面向量共线的判定及应用

新知构建

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，其中 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是________________.

【诊断分析】 判断下列说法的正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)若向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$. ( )

(2)若向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，且 $x_1y_1-x_2y_2=0$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. ( )

(3)已知 $A(1,-3)$，$B\left(8,\frac{1}{2}\right)$，且 A，B，C 三点共线，则 C 点的坐标可能是$(9,1)$. ( )

(4)已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，则 $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{b}$. ( )

典例解析

例 2 (1)下列各组向量是平行向量的有________.(填序号)

①$\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-3)$；

②$\boldsymbol{a}=(0.5,4)$，$\boldsymbol{b}=(-8,64)$；

③$\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,4)$；

④$\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{4}{3},2\right)$.

(2)已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,2)$，当 k 为何值时，$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 平行？平行时它们是同向还是反向？

变式 (1)下列向量中与 $\boldsymbol{a}=(2,-3)$共线的是( )

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{2}{3},1\right)$

C. $\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$　　D. $(1,2)$

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,3)$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $k=$ ________.

[素养小结]

向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,x_2)$共线的判定方法

(1)利用向量共线定理，由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$推出 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

(2)利用向量共线的坐标表达式 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 直接求解.

拓展 已知直角坐标平面上的四点 $A(1,0)$，$B(4,3)$，$C(2,4)$，$D(0,2)$，求证：四边形 $ABCD$ 是梯形.

◆ 要点三　三点共线的判定及应用

例 3 (1)已知 $\overrightarrow{OA}=(3,4)$，$\overrightarrow{OB}=(7,12)$，$\overrightarrow{OC}=(9,16)$，求证：$A,B,C$ 三点共线.

(2)设向量 $\overrightarrow{OA}=(k,12)$，$\overrightarrow{OB}=(4,5)$，$\overrightarrow{OC}=(10,k)$，当 k 为何值时，A,B,C 三点共线？

变式 在平面直角坐标系中，已知 $A(1,m)$，$B(-2,2m+1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,m-1)$，若 A,B,C 三点能构成三角形，则实数 m 的取值范围为________.

[素养小结]

三点共线的条件以及判定方法

(1)已知 A,B,C 三点共线时可转化为 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，利用向量共线的条件求解.

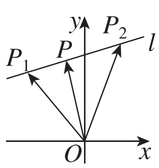
(2)利用两个非零向量平行证明三点共线时需分两步完成：

①证明两个非零向量平行；②证明两个非零向量有公共点.

◆ 要点四　线段定比分点的坐标及应用

新知构建

如图，线段 P_1P_2 的端点 P_1,P_2 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，点 P 是直线 P_1P_2 上的一点，当 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ 时，点 P 的坐标是________.



特别地：当 $\lambda=1$ 时，设线段 P_1P_2 的中点 P 的坐标为 (x,y)，则 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$

典例解析

例 4 (1)已知点 $A(2,3)$，$B(6,-3)$，点 P 是线段 AB 的一个三等分点，求点 P 的坐标.

(2)已知△ABC 的三个顶点为 $A(2,1)$，$B(3,2)$，$C(-1,4)$. 若 G 为△ABC 的重心，求 $\overrightarrow{AG}$ 的坐标.

变式 已知两点 $A(3,-4)$，$B(-9,2)$，点 P 在直线 AB 上，且 $|\overrightarrow{AP}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$，求点 P 的坐标.

[素养小结]

涉及定比分点或者线段相关比例问题的两种思路：

(1)利用向量共线定理列方程组求解；

(2)利用定比分点坐标公式求解.